

素な3ボールジャグリング数列の最大周期について

西村 保三^{*1} 桑原 佑輔^{*2}

(2014年9月8日 受付)

1 はじめに

ジャグリング（お手玉）とは、複数の物体（以下ボール）を連続的に投げ上げる芸である。今日、多くのジャグラーに支持されているジャグリング・パターンのサイトスワップ（site-swap）表記法は、1985年頃に、カルフォルニア工科大学の Bruce Tieman、カルフォルニア大学サンタクルーズ校の Paul Klimek、ケンブリッジ大学の Michael Day の3人によって、それぞれ独立に考案された。サイトスワップでは、等間隔の一定なリズムでボールを投げることが仮定して、ボールの投球パターンを数列で表現する。例えば最も基本的な技である、3ボールカスケードは、サイトスワップでは $\dots 3333 \dots$ という数列、あるいは周期1の循環節だけ取り出して、より簡潔に3で表される。同様に、3ボールシャワーは51、片手2つは40で表される。サイトスワップ表記法によって、ジャグリングのパターンを表現した数列をジャグリング数列と呼ぶ。これまで、どのような数列がジャグリング数列となり、その組合せは何通りあるか等の様々な問題が数学において研究されてきた（[2, 3, 6, 7] など）。

本稿ではジャグリング数列の周期について議論する。例えば、3333は周期4のジャグリング数列であるが、これは周期1のジャグリング数列3を4回繰り返した $3+3+3+3$ に過ぎない。同様に、423という周期3のジャグリング数列は、 $42+3$ と分割することができ、42と3という2つのパターンを交互に繰り返した複合パターンである。ジャグリング数列は、2つのジャグリング数列に分割できないとき、素（prime）と呼ぶ（[3, 6] 参照）。ボールの数が b 個で、現れる数字の上限を h としたときの、素なジャグリング数列の最大周期を $MP(b, h)$ で表す。 $MP(b, h)$ の具体的な値は、 $b \leq 2$ のときは完全に知られているが、 $b \geq 3$ のときは、幾つかの小さな h を除くと、不等式による評価式が知られているのみである（[1, 6] 参照）。特に $MP(b, h)$ の下限については、 $2(h-1) \leq MP(b, h)$ が知られているが、上限として知られている評価式との差が大きく、よい評価式とはいえない。本稿では、 $b=3$ の場合に、 $MP(3, h)$ のよい評価式を与えて、 $h \rightarrow \infty$ のときの $MP(3, h)$ のオーダーが3であることを示す。

^{*1}福井大学教育地域科学部理数教育講座

^{*2}福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻数学教育領域

2 ジャグリング数列と状態グラフ

この節では，ジャグリング数列と状態グラフの定義と基本性質を [6, Chapter 2] に沿って再掲する。ジャグリングの技の名称については，[4, 5]などを参照せよ。

2.1 ジャグリング数列

本稿で考察するジャグリングのパターンは，次の条件を仮定し，腕の交差などによるボールの軌道の違いは考慮しない。

1. 等間隔の一定のリズムで，左右の手で交互にボールをキャッチして投げる
2. 同時に複数のボールを1つの手で保持しない

実際には，両手で交互に投げるアシンクロ・パターンの場合，キャッチはボールを投げる1拍前すなわち，反対の手で投げる瞬間にキャッチが行われて，1拍間ボールを保持する時間があるが，簡便のためキャッチ&スローを一つの動作とみなし，これらは同時に行われると考える。また「ボールを投げる」とあるが，ボールを0個投げる（手が空の状態）も考える。ボールを（キャッチして）投げる時刻を，数直線上の整数点で表し，各時刻で投げられたボールが次にどの時刻でキャッチされて再び投げられるかを曲線（軌道と呼ぶ）で結んで表したグラフを，ジャグリング・ダイアグラムと呼ぶ。図1, 2, 3は，それぞれ，3ボールカスケード，3ボールシャワー，片手2つのジャグリング・ダイアグラムである。



図 1: 3 ボールカスケード



図 2: 3 ボールシャワー



図 3: 片手2つ

あるジャグリングのパターンに対して、時刻 $i \in \mathbb{Z}$ に投げられたボールが、 a_i 拍後にキャッチされて再び投げられるとして、非負整数列 $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を定める。ただし、時刻 i のときに手が空でボールを保持しない状態のときは、 $a_i = 0$ と定める。 a_i は時刻 i で投げられるボールの滞空時間を表しており、これをその投球の高さ、その投げ方を a_i -スローと呼ぶ。数列 $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ が、周期 p を持つ、すなわち全ての $i \in \mathbb{Z}$ について $a_{i+p} = a_i$ が成立するとき、循環節のみを取り出して、 \mathbf{a} を有限数列で $\mathbf{a} = \{a_i\}_{0 \leq i < p} = a_0 a_1 \cdots a_{p-1}$ と表す（注：数列は普通 $\{a_i\}_{0 \leq i < p} = a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ 等と表記するが、サイトスワップの習慣に従い、本稿では項の切れ目を省略して表記する。例えば、33 は 3, 3 を意味する）。

定義 2.1 (1) 非負整数列 $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ がジャグリング数列とは、 $f(i) := i + a_i$ で定まる関数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ が全単射であるときをいう。

(2) 有限非負整数列 $\mathbf{a} = \{a_i\}_{0 \leq i < p}$ が周期 p のジャグリング数列とは、 $f(i) := i + a_i \bmod p$ で定まる関数 $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ が全単射であるときをいう。ただし、 $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ は整数の法 p に関する合同類が作る有限巡回群を表す。

例 2.2 3 ボールカスケードから決まるジャグリング数列は、 $\dots 3333 \dots$ であり、循環節を取り出した有限数列の表記では、3, 33, 333 などと表される。同様に、3 ボールシャワーのジャグリング数列は 51, 15, 5151 など、片手 2 つは 40, 04, 4040 などと表される。

周期 p の数列 $\mathbf{a} = \{a_i\}_{0 \leq i < p}$ に対して、各項を k だけずらした数列 $\mathbf{a}' = \{a_{i+k \bmod p}\}_{0 \leq i < p}$ を構成する変換をサイクリックシフトと呼ぶ。ジャグリング数列に対して、サイクリックシフトしたものは、時刻の起点が異なるだけで同じパターンを表している。

ジャグリング・ダイアグラムにおいて、軌道は 1 つのボールの動きを表しており、軌道の数はボールの個数を意味する。ジャグリング数列とボールの個数には、次の関係がある。

命題 2.3 周期 p のジャグリング数列 $\mathbf{a} = \{a_i\}_{0 \leq i < p}$ をジャグリングするのに要するボールの個数は、数列に現れる数字の平均値 $b = (a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1})/p$ に等しい。

例 2.4 3 ボールのジャグリング数列で、周期 3 のものは、サイクリックシフトで移り合うものを除くと、333, 423, 441, 504, 522, 531, 603, 612, 630, 711, 720, 801, 900 の 13 通りある。

2.2 ジャグリング状態グラフ

初めに例を使って説明する。今 3 個のボールをジャグリングしているとし、投げられる高さの上限を 5 とする。図 4 のジャグリング・ダイアグラムは、3 つのボールをジャグリングしてきて、現在は縦の点線の状態とする。ここから、どうジャグリングし続けられるかを考える。現在の状態からは、1, 3, 4 拍後にボールが落下してきて、2, 5 拍後にはとりあえずボールは落下し

てこない予定である。この状態を 10110 と表す（1 はボールが落下してくることを意味する）。1 拍後，キャッチしたボールは，既にボールが落ちてくる予定になっている 2 拍後と 3 拍後に落下する 2-スローや 3-スローでは投げられないため，ここで可能な投球の高さは 1,4,5 のいずれかである。仮にここで 4-スローで投げたとすると，ボールの落下予定の状態は 01110 となる。その 1 拍後にはボールは落ちてこないで，手が空の状態（0-スロー）である。その後，状態は 11100 へと移る。今までの状態の変遷は，

$$10110 \xrightarrow{4} 01110 \xrightarrow{0} 11100$$

で表される。このように，ボールの落下予定の状態が，投球によって次々移り変わっていくことで，ジャグリングを続けることができる。

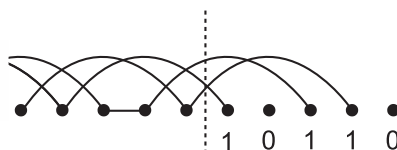


図 4: 状態 10110

定義 2.5 整数 b, h ($0 \leq b \leq h$, $h \geq 1$) に対して，ボール数 b ，高さ h の ジャグリング状態グラフ $\Gamma(b, h) = (V, E)$ とは，以下の頂点集合 V と，ラベル付きの有向辺 E で構成される有向グラフである。このグラフの頂点を状態と呼び，ラベル k の有向辺をしばしば k -スローと呼ぶ。

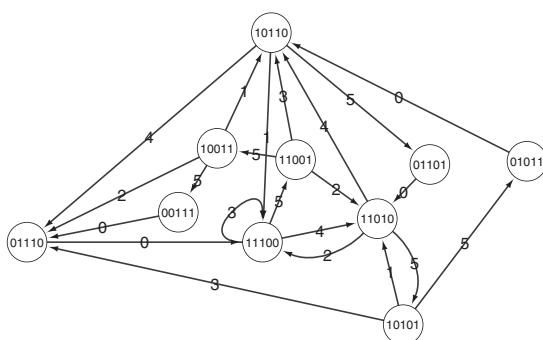
1. $V = \{s = s_1 s_2 \cdots s_h \in \{0, 1\}^h \mid s_1 + s_2 + \cdots + s_h = b\}$
2. $s = s_1 s_2 \cdots s_h, s' = s'_1 s'_2 \cdots s'_h \in V$ に対して， $(s, s') \in E \Leftrightarrow$ ある $0 \leq k \leq h$ が存在して，
 - (1) $k = 0$ のとき： $s_{i+1} = s'_i$ ($1 \leq i \leq h-1$), $s_1 = s'_h = 0$,
 - (2) $k \neq 0$ のとき： $s_{i+1} = s'_i$ ($1 \leq i \leq h-1, i \neq k$), $s_1 = s'_k = 1, s_{k+1} = 0$ or $k = h$
 このとき，この有向辺 (s, s') にラベル k を付けて， $s \xrightarrow{k} s'$ と表す。

例 2.6 図 5 はボール数 3，高さ 5 のジャグリング状態グラフ $\Gamma(3, 5)$ である。

ジャグリング状態グラフについて，次の性質が成り立つ ([6, 2.8.5 節] 参照)。

命題 2.7 (1) $b \leq h' < h$ のとき， $\Gamma(b, h)$ を頂点部分集合 $V' = \{s = s_1 \cdots s_{h'} 0 \cdots 0 \in \{0, 1\}^h \mid s_1 + \cdots + s_{h'} = b\}$ に制限した部分グラフは $\Gamma(b, h')$ と同型であり， $\Gamma(b, h') \subset \Gamma(b, h)$ と考えてよい。
 (2) $\Gamma(h-b, h)$ は， $\Gamma(b, h)$ において矢印の向きを反対にしたグラフと同型である。

証明 (1) は明らか。(2) は， $MP(b, h)$ の各状態の 1 と 0 を反転させて逆順にすればよい（例えば， $10011 \leftrightarrow 00110$ ）。このとき，ラベル k の辺は，逆向きのラベル $h-k$ の辺に対応する。□

図 5: ジャグリング状態グラフ $\Gamma(3, 5)$

状態グラフの定義から，ボール数 b ，高さが高々 h であるジャグリング数列は，有向グラフ $\Gamma(b, h)$ の道に対応し，有限ジャグリング数列は， $\Gamma(b, h)$ の閉路に対応する。

定義 2.8 ジャグリング数列 $\mathbf{a} = a_0 a_1 \cdots a_{p-1}$ は，対応する状態グラフの閉路が初等的である（同じ頂点を2度通らない）とき，**素**（prime）と呼ぶ。

一般に，有向グラフの任意の閉路は，有向辺を共有しない幾つかの初等閉路に分割できることから，任意のジャグリング数列は，素なジャグリング数列に分割できることがわかる。

例 2.9 3ボールジャグリング数列 55150440 は，状態グラフ $\Gamma(3, 5)$ において，551:504:40 のコロンの位置で状態 10110 を2回訪れるので，素なジャグリング数列 55140 と 504 に分割できる（サイクリックシフトすれば， $40551504 = 40551 + 504$ と表せる）。

3 素なジャグリング数列の最大周期

ボール数 b ，高さを高々 h とする，素なジャグリング数列の最大周期を $MP(b, h)$ と表す。これは，ジャグリング状態グラフ $\Gamma(b, h)$ の最長の初等閉路の長さとも言い換えられる。初等閉路の長さはグラフの頂点数を超えないので，明らかな上限 $MP(b, h) \leq \binom{h}{b}$ が得られる。また $b \geq 1$ のとき，状態 $1 \cdots 10 \cdots 0$ を基点とする， h -スローと 0 -スローだけからなる周期 h の素なジャグリング数列 $h \cdots h0 \cdots 0$ （ h のギャップ・パターンの1種で，後述するように，対応する閉路をネックレスと呼ぶ）が存在することから，下限を与える不等式 $h \leq MP(b, h)$ が得られる。以上より，次の不等式が成立する。

$$h \leq MP(b, h) \leq \binom{h}{b} \quad (1)$$

命題 2.7 (1) より， $MP(b, h)$ は h に関して単調増加である。また，命題 2.7 (2) より，一般に $MP(b, h) = MP(h - b, h)$ が成立するので， $MP(b, h)$ は $h \geq 2b$ のケースを考察すれば十分である。評価式 (1) は，より精密な議論をすることで，次の定理に改善できることが知られている ([6, 2.8.4 節] 参照)。

定理 3.1 整数 b, h ($2 \leq b \leq h - 2$) に対して，

$$N(b, h) = \frac{1}{h} \sum_{d | \gcd(b, h)} \phi(d) \binom{h/d}{b/d}$$

とおく。ここで $\phi(d) := \#\{1 \leq k \leq d \mid \gcd(k, d) = 1\}$ はオイラー関数とする。 $(b, h) \neq (2, 4)$ のとき，次の不等式が成立する。

$$2(h - 1) \leq MP(b, h) \leq \binom{h}{b} - N(b, h) \quad (2)$$

上の定理から，特に $2 \leq b \leq h - 2$ のとき， $\Gamma(b, h)$ には，全ての頂点を通る初等閉路（ハミルトン閉路）は存在しないことがわかる。以下に，現在までに知られている $MP(b, h)$ の具体的な値を列挙する ([1, 6] 参照)。

命題 3.2 (1) $MP(0, h) = 1$, $MP(1, h) = h$

(2) $b = 2$ のとき， $h \geq 4$ について，

$$MP(2, h) = \binom{h}{2} - N(2, h) = \begin{cases} \frac{1}{2}h(h - 2) & h : \text{even} \\ \frac{1}{2}(h - 1)^2 & h : \text{odd} \end{cases}$$

(3) $b = 3, 4$ のとき，

表 1: $MP(b, h)$

$b \backslash h$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	15	30	49	74	108	149	200	263	337	424	524	639
4	12	30	58	112	188	300						

以下，ボール数は 3 に固定して， $MP(3, h)$ を考察する。定理 3.1 に $b = 3$ を適用して， $h \geq 5$ のとき次の不等式が得られる。

$$2(h - 1) \leq MP(3, h) \leq \begin{cases} \frac{1}{6}(h - 1)^2(h - 2) & h \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{1}{6}(h - 3)(h^2 - h + 2) & h \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \quad (3)$$

表 1 と比較すると， $h \leq 17$ までは， $MP(3, h)$ は (3) の上限を与える 3 次式と高々 1 の違いしかない一方で，下限式 $2(h - 1)$ は h の 1 次式であり， $MP(3, h)$ との差が大きい。そこで $MP(3, h)$ の下限式を改善することを考える。始めに，2 ボールジャグリングとの関係から，2 次の下限式が得られることに注意する。

命題 3.3 $h \geq 3$ のとき, $\Gamma(3, h)$ は, $\Gamma(2, h-1)$ と同型なマイナーを含む。

証明 $\Gamma(2, h-1)$ の状態 $110 \cdots 0$ の片方の (例えば最初の) 1 を 11 に置き換える変換を考える。例えば $\Gamma(2, 4)$ において, $1100 \xrightarrow{3} 1010$ の下線を付けた 1 を 11 に置き換えて, $11100 \xrightarrow{44} 10110$ に変換する。これは, $\Gamma(3, 5)$ の2つの辺が縮約された辺である。ただし, 11 と 11 は同じものと考え, 例えば, $1100 \xrightarrow{2} 1100$ は, この置き換えで, $(11100 \xrightarrow{33} 11100$ ではなく) $11100 \xrightarrow{3} 11100$ に変換する。この置き換えによって, $\Gamma(2, h-1)$ は $\Gamma(3, h)$ のある部分グラフを適当に縮約したグラフに変換される。□

命題 3.3 より, 不等式 $MP(3, h) \geq MP(2, h-1)$ が成り立つ。ここで右辺は $h \geq 5$ のとき命題 3.2 (2) で与えられているので, 次の不等式を得る (注. $h = 3, 4$ のときにも成立する)。

系 3.4 $h \geq 3$ のとき,

$$MP(3, h) \geq \begin{cases} \frac{1}{2}(h-1)(h-3) & h : \text{odd} \\ \frac{1}{2}(h-2)^2 & h : \text{even} \end{cases} \quad (4)$$

以下では, 3つのステップに分けて, 状態グラフ $\Gamma(3, h)$ をより精密に調べて, より長い初等閉路を構成していく。有限非負整数列において, k が a 回繰り返される項 $k \cdots k$ があるとき, これを k^a と略記し, 有限数列 $\mathbf{a} = a_0 a_1 \cdots a_{p-1}$ の長さを, $l(\mathbf{a}) = p$ と表す。例えば $\Gamma(8, 12)$ の状態 111110000111 は $1^5 0^4 1^3$ と略記され, $l(1^5 0^4 1^3) = 12$ である。 $\Gamma(b, h)$ の状態 $s_1 = s_{11} s_{12} \cdots s_{1h} \in V$ は, 任意のサイクリックシフトで自分自身と一致しないとする。このとき, 0-スローと h -スローだけからなる h のギャップ・パターン

$$s_1 \xrightarrow{k_1} s_2 \xrightarrow{k_2} \cdots \xrightarrow{k_{h-1}} s_h \xrightarrow{k_h} s_1$$

(k_i は $s_{1i} = 1$ のとき h , $s_{1i} = 0$ のとき 0) は長さ h の初等閉路となり, ネックレスと呼ばれる。ネックレス $s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{m-1}} s_m \xrightarrow{a_m} s_1$ (a_i は h と 0 からなる数列) の一部 $s_m \xrightarrow{a_m} s_1$ を取り去った道

$$C : s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{m-1}} s_m$$

をチェーンと呼び, ネックレスの一部であることを強調する場合には, 始点に戻るルートも示して,

$$C = \{s_1 \xrightarrow{a_1} s_2 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{m-1}} s_m\} \xrightarrow{a_m}$$

のように表すことにする。 C の長さは, $l(C) = l(a_1) + \cdots + l(a_{m-1}) = h - l(a_m)$ である。

[Step 1] $h \geq 5$ を仮定し, $1 \leq i \leq h-4$ について, チェーン C_i を次で定義する。

$$C_i := \{10^{h-3-i} 110^i \xrightarrow{h0^{h-3-i}} 110^i 10^{h-3-i} \xrightarrow{h} 10^i 10^{h-3-i} 1\} \xrightarrow{h0^i}$$

C_i の長さは, $l(C_i) = h - 1 - i$ である。このとき, チェーン C_i を繋げた次の閉路を考える。

$$L := 1110^{h-3} \xrightarrow{hh1} C_1 \xrightarrow{(h-2)^0} C_2 \xrightarrow{(h-2)^{0^2}} C_3 \xrightarrow{(h-2)^{0^3}} \dots \xrightarrow{(h-2)^{0^{h-5}}} C_{h-4} \xrightarrow{(h-2)^{0^{h-4}}} 1110^{h-3}$$

この閉路は初等的であり, それぞれの $C_i \xrightarrow{(h-2)^{0^i}}$ の部分の長さは, $(h - 1 - i) + (i + 1) = h$ であるから, その全長は $l(L) = 3 + h(h - 4) = h^2 - 4h + 3$ である。

命題 3.5 $h \geq 5$ のとき,

$$MP(3, h) \geq h^2 - 4h + 3 \quad (5)$$

【Step 2】 $h \geq 9$ を仮定して, チェーン D_0, D_i, D'_i ($1 \leq i \leq [\frac{h-7}{2}]$) を次で定義する。

$$D_0 := \{101010^{h-5} \xrightarrow{h0} 1010^{h-5}10 \xrightarrow{h0} 10^{h-5}1010\} \xrightarrow{h0^{h-5}}$$

$$D_i := \{10^{i+1}1010^{h-5-i} \xrightarrow{h0^{i+1}} 1010^{h-5-i}10^{i+1} \xrightarrow{h0} 10^{h-5-i}10^{i+1}10\} \xrightarrow{h0^{h-5-i}}$$

$$D'_i := \{1010^{i+1}10^{h-5-i} \xrightarrow{h0} 10^{i+1}10^{h-5-i}10 \xrightarrow{h0^{i+1}} 10^{h-5-i}1010^{i+1}\} \xrightarrow{h0^{h-5-i}}$$

ここで, チェーン D_0, D_i, D'_i は互いに独立であり, その長さは, $l(D_i) = l(D'_i) = i + 4$ である。チェーン D_i, D'_i を繋げてできる次の道を考える。

$$D := D_0 \xrightarrow{(h-7)0^{h-8}} D_1 \xrightarrow{(h-7)0^{h-8}} D'_1 \xrightarrow{(h-9)0^{h-10}} D_2 \xrightarrow{(h-8)0^{h-9}} D'_2 \xrightarrow{(h-11)0^{h-12}} \dots$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{300} D_{\frac{h}{2}-4} \xrightarrow{(\frac{h}{2}-2)0^{\frac{h}{2}-3}} D'_{\frac{h}{2}-4} & h: \text{ even} \\ \xrightarrow{20} D_{\frac{h-7}{2}} \xrightarrow{\frac{h-5}{2}0^{\frac{h-7}{2}}} D'_{\frac{h-7}{2}} & h: \text{ odd} \end{cases}$$

道 D の長さ $l(D) = 4 + \sum_{i=1}^{[\frac{h-7}{2}]} \{(h - 5 - 2i) + (i + 4)\} + \{(h - 6 - i) + (i + 4)\}$ は, h が偶数のとき, $l(D) = \frac{7}{8}h^2 - \frac{31}{4}h + 10$, h が奇数のとき, $l(D) = \frac{7}{8}h^2 - 7h + \frac{81}{8}$ である。

Step 1 で定義した閉路 L から C_{h-4} 以降を取り去ったチェーンを L_0 とおく。

$$L_0 : \{1110^{h-3} \xrightarrow{hh1} C_1 \xrightarrow{(h-2)^0} C_2 \xrightarrow{(h-2)^{0^2}} C_3 \xrightarrow{(h-2)^{0^3}} \dots \xrightarrow{(h-2)^{0^{h-5}}} C_{h-4}\} \xrightarrow{(h-2)^{0^{h-4}}}$$

L_0 の長さは, $l(L_0) = h^2 - 5h + 6$ である。 L_0 と D を繋げて, 新たな閉路 M を作る。

$$M : L_0 \xrightarrow{(h-5)0^{h-6}} D \begin{cases} \xrightarrow{1} 10^{\frac{h}{2}-2}1010^{\frac{h}{2}-2} \xrightarrow{\frac{h}{2}0^{\frac{h}{2}-2}} 1110^{h-3} & h: \text{ even} \\ \xrightarrow{\frac{h+1}{2}0^{\frac{h-3}{2}}} 1110^{h-3} & h: \text{ odd} \end{cases}$$

閉路 M は初等的であり, 長さは $l(M) = l(L_0) + (h - 5) + l(D) + \begin{cases} \frac{h}{2} & h: \text{ even} \\ \frac{h-1}{2} & h: \text{ odd} \end{cases}$ である。

右辺を計算して次の不等式を得る。

命題 3.6 $h \geq 9$ のとき,

$$MP(3, h) \geq \begin{cases} \frac{15}{8}h^2 - \frac{45}{4}h + 11 & h: \text{even} \\ \frac{15}{8}h^2 - \frac{21}{2}h + \frac{85}{8} & h: \text{odd} \end{cases} \quad (6)$$

【Step 3】 $h \geq 12$ を仮定し, $1 \leq j \leq \lfloor \frac{h}{3} \rfloor - 3$, $1 \leq i \leq \lfloor \frac{h-7-3j}{2} \rfloor$ に対して, チェーン $E_{j,0}$, $E_{j,i}$, $E'_{j,i}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} E_{j,0} &:= \{10^{j+1}10^{j+1}10^{h-5-2j} \xrightarrow{h0^{j+1}h0^{j+1}} 10^{h-5-2j}10^{j+1}10^{j+1}\} \xrightarrow{h0^{h-5-2j}} \\ E_{j,i} &:= \{10^{j+1+i}10^{j+1}10^{h-5-2j-i} \xrightarrow{h0^{j+1+i}h0^{j+1}} 10^{h-5-2j-i}10^{j+1+i}10^{j+1}\} \xrightarrow{h0^{h-5-2j-i}} \\ E'_{j,i} &:= \{10^{j+1}10^{j+1+i}10^{h-5-2j-i} \xrightarrow{h0^{j+1}h0^{j+1+i}} 10^{h-5-2j-i}10^{j+1}10^{j+1+i}\} \xrightarrow{h0^{h-5-2j-i}} \end{aligned}$$

各 j に対して, チェーン $E_{j,i}$, $E'_{j,i}$ を繋いで, 道 E_j を以下で定義する.

$$\begin{aligned} E_j : E_{j,0} &\xrightarrow{(h-3j-7)0^{h-3j-8}} E_{j,1} \xrightarrow{(h-3j-7)0^{h-3j-8}} E'_{j,1} \xrightarrow{(h-3j-9)0^{h-3j-10}} E_{j,2} \longrightarrow E'_{j,2} \longrightarrow \\ &\dots \xrightarrow{(h-3j-5-2i)0^{h-3j-6-2i}} E_{j,i} \xrightarrow{(h-3j-6-i)0^{h-3j-7-i}} E'_{j,i} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_{j,m} \longrightarrow E'_{j,m} \end{aligned}$$

ただし, $m = \lfloor \frac{h-7-3j}{2} \rfloor$ である. このとき, E_j の長さは,

$$\begin{aligned} l(E_j) &= 2j + 4 + \sum_{i=1}^m \{2(2j + 3 + i) + (h - 3j - 6 - i) + (h - 3j - 5 - 2i)\} \\ &= 2j + 4 + m(2h - 2j - 5) - \frac{1}{2}m(m + 1) \\ &> 2j + 4 + \frac{h-8-3j}{2}(2h - 2j - 5) - \frac{1}{2} \cdot \frac{h-7-3j}{2} \cdot \frac{h-5-3j}{2} \\ &= \frac{7}{8}h^2 - \frac{13}{4}jh + \frac{15}{8}j^2 - 9h + 13j + \frac{157}{8} \end{aligned}$$

Step 2 で定義した道 D において, $D_j \xrightarrow{(h-6-j)0^{h-7-j}} D'_j$ の部分に, 道 E_j を次のように挟み込む.

$$D_j \xrightarrow{(h-6-2j)0^{h-7-2j}} E_j \xrightarrow{(h-6-2j-m)0^{h-7-2j-m}} D'_j$$

この挟み込みによる道の長さの増分を Δ_j とおくと,

$$\begin{aligned} \Delta_j &= l(E_j) + h - 6 - 3j - m \\ &> \left(\frac{7}{8}h^2 - \frac{13}{4}jh + \frac{15}{8}j^2 - 9h + 13j + \frac{157}{8}\right) + h - 6 - 3j - \frac{h-7-3j}{2} \\ &= \frac{7}{8}h^2 - \frac{13}{4}jh + \frac{15}{8}j^2 - \frac{17}{2}h + \frac{23}{2}j + \frac{137}{8} \end{aligned}$$

Step 2 で定義した閉路 M において, 全ての j で E_j を挟み込んだ閉路を N とおく.

$$\begin{aligned} N : L_0 &\longrightarrow D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow E_1 \longrightarrow D'_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow D_n \longrightarrow E_n \longrightarrow D'_n \\ &\longrightarrow D_{n+1} \longrightarrow D'_{n+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow D_{\lfloor \frac{h-7}{2} \rfloor} \longrightarrow D'_{\lfloor \frac{h-7}{2} \rfloor} \longrightarrow 1110^{h-3} \end{aligned}$$

ただし， $n = \lfloor \frac{h}{3} \rfloor - 3$ である。このとき，閉路 N の長さは，

$$\begin{aligned}
 l(N) &= l(M) + \sum_{j=1}^n \Delta_j \\
 &> \left(\frac{15}{8}h^2 - \frac{45}{4}h + 11 \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{7}{8}h^2 - \frac{13}{4}jh + \frac{15}{8}j^2 - \frac{17}{2}h + \frac{23}{2}j + \frac{137}{8} \right) \\
 &= \left(\frac{15}{8}h^2 - \frac{45}{4}h + 11 \right) + \left(\frac{7}{8}h^2 - \frac{17}{2}h + \frac{137}{8} \right) n - \left(\frac{13}{4}h - \frac{23}{2} \right) \frac{1}{2}n(n+1) \\
 &\quad + \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
 &> \left(\frac{15}{8}h^2 - \frac{45}{4}h + 11 \right) + \left(\frac{7}{8}h^2 - \frac{17}{2}h + \frac{137}{8} \right) \cdot \frac{h-11}{3} - \left(\frac{13}{4}h - \frac{23}{2} \right) \frac{1}{2} \cdot \frac{h-9}{3} \cdot \frac{h-6}{3} \\
 &\quad + \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{h-11}{3} \cdot \frac{h-8}{3} \cdot \frac{2h-19}{3} \\
 &= \frac{29}{216}h^3 - \frac{71}{48}h^2 + \frac{1801}{144}h - \frac{7915}{216}
 \end{aligned}$$

定理 3.7 $h \geq 12$ のとき，

$$MP(3, h) > \frac{29}{216}h^3 - \frac{71}{48}h^2 + \frac{1801}{144}h - \frac{7915}{216} \quad (7)$$

不等式 (3) と (7) より， $MP(3, h)$ のオーダーが決定する。

系 3.8 $h \rightarrow \infty$ のとき， $MP(3, h) = O(h^3)$ である。

注意 3.9 本稿で得られた下限 (7) と上限 (3) は，3 次の係数に差があるので，(7) はさらに改善できる余地がある（表 1 の観察から $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{MP(3, h)}{h^3} = \frac{1}{6}$ が予想される）。また，系 3.8 に関して，一般に $h \rightarrow \infty$ のとき $MP(b, h) = O(h^b)$ が予想される。

参考文献

- [1] J. Boyce, Article on prime juggling sequences on the news group `rec.juggling` (4 June 1998), accessible via the Juggling Information Service at www.juggling.org.
- [2] J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham and C. Wright, Juggling drops and descents, *American Mathematical Monthly* 101 (1994), p.507–519.
- [3] F. Chung and R. Graham, Primitive juggling sequences, *American Mathematical Monthly* 115 (2008), p.185–194.
- [4] チャーリー・ダンシー著，井上恵介訳，ボールジャグリング百科，遊戯社，2003.
- [5] 中嶋潤一郎，ボールジャグリング入門第2版，ナランハ，2001.
- [6] B. Polster, *The Mathematics of Juggling*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [7] 徳重典英，ジャグリングの数列，*数学セミナー* 1996年7月号，p.19-23.